

# TD 18-19 : Matrices et systèmes linéaires

## Calcul matriciel

**Exercice 1.** Trouver tous les produits matriciels possibles parmi les matrices suivantes et les calculer.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $J^2$ . En déduire  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 3** (Matrice nilpotente, décomposition  $D+N$ ). Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $N^k$ . En déduire  $A^k$ .

2) On considère les suites  $(u_n), (v_n), (w_n)$  définies par  $u_0 = v_0 = w_0 = 1$  et la relation de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{cases}$$

Écrire  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$  en fonction de  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . En déduire les valeurs de  $u_n, v_n, w_n$ .

**Exercice 4.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer la puissance  $k$ -ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  telles que  $AM = MA$ .

**Exercice 6** (\*). On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . On cherche toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $X^2 = A$ . On considère une solution  $M$  de cette équation.

1) Montrer que  $M$  commute avec  $A$ .

2) En déduire que certains coefficients de  $M$  sont nuls. Conclure.

**Exercice 7.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I_n = 0$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 8.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2 - 3A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $(A + I_3)^3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $A^2 = I_n$ . On pose

$$E = \{pI_n + qA \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif.

**Exercice 11.** On pose  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- 1) Montrer que  $(G, \times)$  est un groupe.
- 2) (Après avoir vu les systèmes linéaires) Est-ce un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 12 (★).** On définit le centre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par

$$Z = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA\}$$

Montrer que  $A \in Z$  si et seulement si  $A$  est une matrice scalaire. *Indication : on pourra considérer les matrices élémentaires.*

**Exercice 13.** Soit  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $B = A^\top A$ .

- 1) Montrer que  $B$  est une matrice symétrique.
- 2) Montrer que les coefficients diagonaux de  $B$  sont positifs.
- 3) Montrer que si  $B = 0$ , alors  $A = 0$ .

**Exercice 15.** Montrer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = A + S$ . *Indication : raisonner par analyse-synthèse.*

**Exercice 16.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MM^\top M = I_n$ .

Montrer que  $M$  est inversible. Puis montrer que  $M$  est symétrique.

---

## Systèmes linéaires

---

**Exercice 17.** On considère le système de gauche ci-dessous. Un taupin un peu hâtif réalise les opérations suivantes en même temps :  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$  ;  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$  ;  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ . Il obtient alors le système de droite :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce second système. Est-il équivalent au premier ?

**Exercice 18.** Résoudre les systèmes suivants

$$1) \begin{cases} x = -y + 3 \\ 2x = 3y + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = -1 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + t = 3 \\ t + w = 4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 19.** Déterminer les valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  telles que le système suivant soit compatible : 
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = -2 \\ -x - 3y + 4z = m \end{cases}$$

---

## Calcul effectif de l'inverse

---

**Exercice 20.** Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles et, lorsque c'est le cas, calculer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad F_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

Pour  $F_m$ , on donnera uniquement les valeurs de  $m$  pour lesquelles la matrice  $F_m$  est inversible, sans calculer son inverse.

**Exercice 21.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
- 2) Vérifier que  $A = PDP^{-1}$ .
- 3) En déduire  $A^k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .